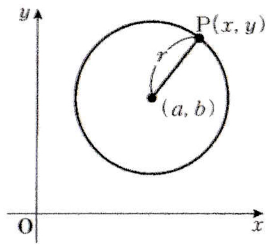
§1. 円の方程式を求める

円の基本公式

点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



①中心座標と半径が与えられている場合

●直径の両端が分かっていたり、軸と接する条件が与えられている
など様々ながある。

●「～に関して対称な円」は、半径は分かっているのだから、線対称や
点対称な点（中心）を求めるのと同じ問題。

§1. 円の方程式を求める

②円上の３点が与えられている場合

●円の方程式には３つの文字が必要。
普通は、中心の座標(a, b)と半径の cで表すが
問題によっては、円の方程式を
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおいてa, b, cを解いてもいい。

§1. 円の方程式を求める

③円上の２点と中心がのる直線式が与えられている場合

●直線式を用いて円の中心を表せば（例えば（t, 2t－4）とか）
円の方程式は文字は２つで表せる。
与えられている２点を代入すれば、式が２つできて解ける。

§2. 円と直線

④円と直線の位置関係の場合

●直線が円と離れているか、接しているか、交わっているかは、
二次関数＝0　の解の個数次第だから、判別式の問題に置き換わる。

円と直線の位置関係

円と直線のそれぞれの方程式から y を消去して x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が得られるとき，その判別式を $D(=b^2-4ac)$ とすると

$D>0$ $\Leftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる。

$D=0$ $\Leftrightarrow$ 接する。

$D<0$ $\Leftrightarrow$ 共有点をもたない。

§2. 円と直線

⑤円を切り取る直線の弦の長さを問われる場合

●三平方を使う。中心から直線までの距離が分かればいい。
平方完成の要領で式変形する。

例 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $x-y+1=0$ の 2 つの交点を A，B とするとき，線分 AB の長さを求めよ。

〔解〕円の中心 (0, 0) と直線 $x-y+1=0$ の距離 d は

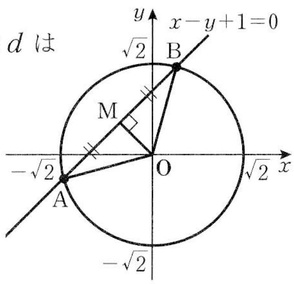
$$d=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また，円の半径は $\sqrt{2}$ である。

線分 AB の中点を M とすると

$$AM=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

よって　$AB=\sqrt{6}$



§2. 円と直線

⑥円と動点の問題

1. 円 $(x-2)^2+y^2=1$ …① 上を点 $(x,\ y)$ が動くとき，$y-3x+4$ の値の最大値と最小値を求めよ。

● $y-3x+4=k$ とおけば、$y=3x-4+k$ だから
k は、円①上を通り傾き３の直線の y 切片＋４の数。
傾き３の直線が円①と共有点を持つ時の y 切片の最大、最小を考えればいい。

§3. 円と接線

⑦円の中心が原点で、円上の接点が分かっている場合

● 接線の直線式はすぐにでる。

円の接線

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

⑦'円上の接点が分かっているが、円の中心が原点ではない場合

● 公式から解いてもいい。上記接線の公式を平行移動しただけのものだから簡単。
もしくは、接点も傾きも分かっているのだから自力で接線の直線式を出してもいい。

円の接線

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $P(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

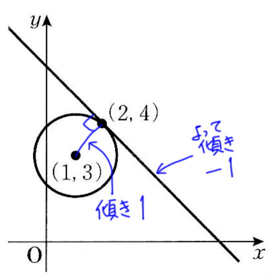
$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

例 円 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$ 上の点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ。

求める接線は、傾きが -1 で点 $(2,4)$ を通るから

$y-4=-1(x-2)$

よって $\underline{y=-x+6}$ //



§3. 円と接線

⑧円と、円上にはない接線の点が分かっている場合

●とりあえず、文字で**接点をおけば接線の方程式もおける。**
円の式と接線の式から、２つの式ができるから解けばいい。

例 点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=5$ に接する直線の方程式を求めよ。

〔解〕接点を $(a,\ b)$ とすると

$a^2+b^2=5$ …① ← (a,b) は円上の点であるから

また，接線の方程式は

$ax+by=5$ …②

これが点 $(3,\ 1)$ を通るから

$3a+b=5$ …③ ← ② に $(3,1)$ を代入する

①，③ より

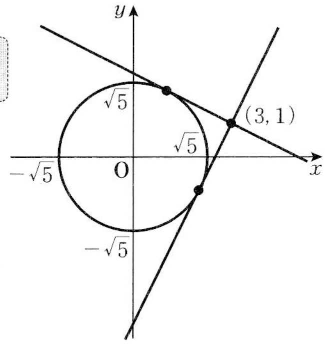
$a^2-3a+2=0$ ← b を消去して整理する

$(a-1)(a-2)=0$

よって　$a=1,\ 2$

③ より　$a=1$ のとき　$b=2$，　$a=2$ のとき　$b=-1$

ゆえに，② より　$x+2y=5$，$2x-y=5$



§3. 円と円

⑨内接と外接の問題。中心間の距離と半径の話が全て

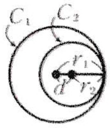
●接するには、外接と内接の２種類があることに注意。分からなくなったら、図を書くといい。

2つの円の内接・外接

2 つの円 C_1, C_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 $(r_1 > r_2)$ とし，中心間の距離を d とする。

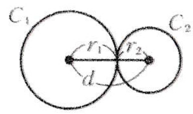
［1］ 内接する

$$d = r_1 - r_2$$



［2］ 外接する

$$d = r_1 + r_2$$

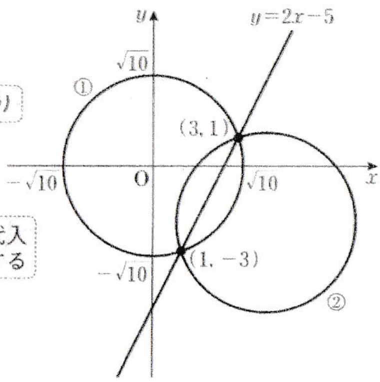


§4. 円と円、もしくは直線と直線の交点を通る図形

⑩２つの円の共有点の問題

●共有点を通る直線の式はすぐ出るから、そしたら直線と円の交点の話に戻る。

例 2つの円 $x^2+y^2-10=0$ …①, $x^2+y^2-8x+4y+10=0$ …② の共有点の座標を求めよ。



〔解〕①, ② より

$8x-4y-20=0$ ⇐ ①−② より

よって　$y=2x-5$ …③

①, ③ より

$x^2-4x+3=0$ ⇐ ③を①に代入して整理する

$(x-1)(x-3)=0$

ゆえに　$x=1, 3$

③ より

$x=1$ のとき　$y=-3$,　$x=3$ のとき　$y=1$

したがって, 共有点は $(1, -3)$, $(3, 1)$

§4. 円と円、もしくは直線と直線の交点を通る図形

⑩′ ２つの直線の共有点の問題

2 直線

$x+y-4=0$ …①

$x-2y-1=0$ …②

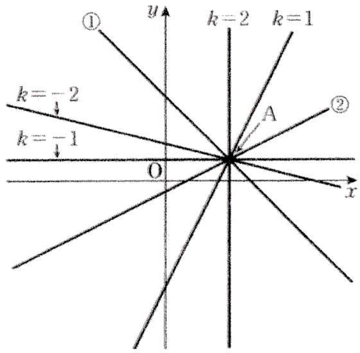
の交点を A とする。

点 A は ①, ② 上の点であるので,

定数 k がどのような値でも

$k(x+y-4)+(x-2y-1)=0$

は交点 A を通る直線を表す。



例 2 直線 $2x-y-3=0$, $x+2y-4=0$ の交点と点 (3, 2) を通る直線の方程式を求めよ。

〔解〕 k を定数として

$k(2x-y-3)+(x+2y-4)=0$

求める直線は点 (3, 2) を通るので

$k(2\cdot3-2-3)+(3+2\cdot2-4)=0$

よって　$k=-3$

ゆえに, $-3(2x-y-3)+(x+2y-4)=0$ より

$x-y-1=0$